

Θεωρία Αποφάσεων Bayes.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 2

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ από $B(1, \theta)$, δηλ. $f(x, \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$ $x=0,1, \dots$

α) Να βρεθεί το ΜΤΖ του $\bar{X}$.

β) Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για το ΜΤΖ του $\bar{X}$ και να σχολιαστεί.

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι για συνθήκη απώλειας $\overset{\text{το οποίο έχω (με συμφέρεται)}}{L(d)} = T^2$ τότε
 συνθήκη κινδύνου $\equiv \text{MTZ} = R(\theta, d) = \text{Var}(d) + [E(d) - \theta]^2$
 $= \text{Var}(\bar{X}) + [E(\bar{X}) - \theta]^2$
 $= \frac{\sigma^2}{n} + [\mu - \theta]^2$

Όπου $\sigma^2 = \eta$ διακύμανση των X_i
 $\mu = \eta$ μέση τιμή των X_i

Όμως για $X_i \sim B(1, \theta)$ έχουμε $E(X_i) = 1 \cdot \theta = \theta$.
 και $\text{Var}(X_i) = 1 \cdot \theta(1-\theta) = \theta(1-\theta)$

Άρα $\text{MTZ} = R(\theta, \bar{X}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n} + \cancel{(\theta - \theta)^2}^0 = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$

β) Για να βρούμε το άνω φράγμα του ΜΤΖ του $\bar{X}$, δηλ του $E(\bar{X} - \theta)^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$, αρκεί προηγουμένως να εντοπίσω το μέγιστο εν λόγω συνολός ως προς θ .

Θεωρώ $g(\theta) = \theta(1-\theta) = \theta - \theta^2$
 Θα είναι $g'(\theta) = 1 - 2\theta = 0 \Rightarrow \theta^* = \frac{1}{2} = 0,5$

και $g''(\theta) = -2 < 0$ άρα για $\theta^* = \text{μέγιστο}$

$$g(\theta^*) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Συνεπώς $E(\bar{X} - \theta)^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{n} \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4n}$

Σχόλιο. Παρατηρούμε ότι το $MT\hat{\Sigma} \leq \frac{1}{4n}$ ενομένως για δειγματοληψία

πχ $n=1000$

Θα είναι $MT\hat{\Sigma} \leq \frac{1}{4000}$, δηλ. ενδεκτικώς ποσοστό σφάλματος

$$\sqrt{\frac{1}{4000}} = 0.0158 \quad \text{ή} \approx 1,58\% \\ 1,6\%.$$

Ορισμός Ένας εκτιμητής (στατιστική συνάρτηση) $T(x)$ θα καλείται αμερόληπτος της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ αν-ν $E(T(x)) = g(\theta)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1: Κάθε στατιστική συνάρτηση είναι αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής της.

Αποδ

Προφανώς αν $g(\theta)$ είναι η μέση τιμή της $T(x)$ τότε $E(T(x)) = g(\theta)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2: Αμερόληπτος εκτιμητής της πληθυσμιακής μέσης τιμής είναι η δειγματική μέση τιμή και έχει διακύμανση σ^2/n .

Δηλ έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τδ από πληθυσμό με $E(X_i) = \mu$ και $\text{Var}(X_i) = \sigma^2/n \quad \forall i=1(1)n$

τότε $E(\bar{X}) = \mu$ και $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

$$\boxed{\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}$$

* Απαραίτητη προϋπόθεση είναι να υπάρχει η μέση τιμή, δηλ να υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int x f(x) dx$ αν X =συνεχής ή να συχμλίνει το άθροισμα $\sum x P(X=x)$ αν X =διακριτή.

Αποδ Θα είναι $E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E \sum X_i \stackrel{\omega}{=} \frac{1}{n} \sum E(X_i) = \frac{1}{n} \sum \mu = \mu$

και $\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3: Έστω $T \sim X_1, \dots, X_n$ $n \geq 2$ από ένα πληθυσμό με $E(X_i) = \mu$ και $Var(X_i) = \sigma^2$, τότε α) αν μ γνωστή ποσότητα

$$T(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n} \text{ αμερ. εκτ της } \sigma^2$$

β) αν μ άγνωστη ποσότητα

$$T(x) = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ αμερόληπτος εκτιμητής της } \sigma^2.$$

Αποδ

α) Αρκεί νδο $E(T(x)) = \sigma^2 \Rightarrow E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}\right) = \sigma^2$

Θα είναι $E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n} n \sigma^2 = \sigma^2$

$Var(X_i)$, αφού γενικά $Var(X) = E(X - E(X))^2$.

β) Αρκεί νδο $E(S^2) = \sigma^2$

Θα είναι $E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) =$

$$= \frac{1}{n-1} E\left[\sum (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left[\sum x_i^2 - 2\sum x_i \bar{x} + n\bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[E(\sum x_i^2) - E(2\sum x_i \bar{x}) + E(n\bar{x}^2) \right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[E(\sum x_i^2) - 2\sum E(x_i) \bar{x} + n\bar{x}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[E(\sum x_i^2) - n\bar{x}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\sum [Var X_i + E(x_i)^2] - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \right] \text{ διότι } Var(X) = E(x^2) - (E(x))^2$$

οπότε $E(S^2) = \frac{1}{n-1} \left[\sum (\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \right]$

$$= \frac{1}{n-1} (n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

$$= \frac{1}{n-1} (n-1) \sigma^2 = \sigma^2$$

Σημείωση

Εάν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε ισχύει ότι $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \equiv G\left(\frac{n-1}{2}, 2\right)$

$$E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = E(\chi_{n-1}^2) = \frac{n-1}{2} \cdot 2 = n-1$$

$$\text{οπότε } \frac{(n-1)E(S^2)}{\sigma^2} = (n-1) \Rightarrow E(S^2) = \sigma^2.$$

Πρόταση

α) Έστω $T(x)$ αμερόληπτος εκτιμητής του $g(\theta)$ και
 α, β σταθερές (δηλ. δεν εξαρτώνται από το θ)
τότε $\alpha T(x) + \beta$ αμερόληπτος εκτιμητής της $(\alpha g(\theta) + \beta)$

β) Έστω $T_i(x)$ αμερόληπτος εκτιμητής της $g_i(\theta)$ με $i=1(1)k$
και α_i σταθερές.

τότε $\alpha_1 T_1(x) + \alpha_2 T_2(x) + \dots + \alpha_k T_k(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i T_i(x)$ αμερόληπτος
εκτιμητής της $\sum \alpha_i g_i(\theta)$

Αποδ

α) Θέλουμε νδo $\alpha T(x) + \beta$ αμερόληπτος της $\alpha g(\theta) + \beta$.

αρμεί νδo $E(\alpha T(x) + \beta) = \alpha g(\theta) + \beta$

όμως $E(\alpha T(x) + \beta) = \alpha E(T(x)) + \beta = \alpha g(\theta) + \beta$

Άρα αποδ το ζητούμενο.

β) Αντίστοιχα με το α) θα έχουμε $E(\sum \alpha_i T_i(x)) = \sum \alpha_i E(T_i(x))$
 $= \sum_{i=1}^k \alpha_i g_i(\theta)$

Άρα αποδ το ζητούμενο.

Χρησιμότητα πρότασης

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε αμερόληπτο εκτιμητή της
παραμετρικής συνάρτησης (ήχ) $g(\theta) = \theta(1-\theta) = \theta - \theta^2$
και γνωρίζουμε ότι $T_1(X)$ αμερ. της θ .
 $T_2(X) = 1 - T_1(X)$ της θ^2

τότε ο εκτιμητής $T(X) = T_1(X) - T_2(X)$ θα είναι αμερ της $g(\theta)$

Πρόταση

Το σύνολο των αμερόληπτων εκτιμητών μιας
παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ είναι είτε κενό
είτε μονοσύνολο, είτε μη αριθμήσιμο

Δηλαδή οι αμερόληπτοι εκτιμητές μιας $g(\theta)$ είναι
είτε 0, είτε 1, είτε άπειροι.

Απόδ

Έστω T_1, T_2 δύο αμερόληπτοι εκτιμητές της $g(\theta)$

Τότε θα ισχύει ότι $\forall \alpha \in [0,1]$ ο $\alpha T_1 + (1-\alpha)T_2$ είναι
αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$, αφού:

$$E(\alpha T_1 + (1-\alpha)T_2) = \alpha [E(T_1) + (1-\alpha)E(T_2)] = \alpha g(\theta) + (1-\alpha)g(\theta) \\ = g(\theta)(\alpha + 1 - \alpha) = g(\theta)$$

Επομένως ξεκινώντας από δύο αμερόληπτους εκτιμητές
καταλήγαμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει ένα μη
αριθμήσιμο σύνολο αμερόληπτων εκτιμητών

Αν ΔΕΝ υπάρχουν δύο αμερ. εκτ, συνεπάγεται ότι ΔΕΝ
θα υπάρχει κανένας ή θα υπάρχει μοναδικός

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω $T \sim X_1, \dots, X_n$ από $B(1, \theta)$ με $f(x_i, \theta) = \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}$

$$x_i = 0, 1, \dots$$

Μπορεί να προσδιοριστεί αμερόληπτος εκτιμητής του θ^{n+1} ή του $\frac{\theta}{1-\theta}$?

ΛΥΣΗ

Έστω $T(x)$ αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$

$$\text{τότε θα ισχύει } E(T(x)) = \sum_x T(x) f_x(x) = \sum_x T(x) * (\text{από κοινά σπ. των } x_i) \quad (i=1, \dots, n)$$

$x = \text{διακριτή Τ.Τ.}$

$$= \sum T(x) \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} = \sum T(x) \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i} \quad x_i = 0, 1, \dots$$

$$\text{Επομένως } E(T(x)) = \sum_x T(x) \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i} = g(\theta) = a_0 + a_1 \theta + \dots + a_n \theta^n$$

Δεδομένου ότι οι δυνατές τιμές του $\sum_{i=1}^n x_i$ είναι $0, 1, \dots, n$
διότι $x_i = 0, 1, \dots$ το αριστερό μέλος της παραπάνω
εξίσωσης είναι πολυώνυμο ως προς θ το πολύ n -βαθμού

Άρα δεν μπορεί να υπάρξει αμερόληπτος εκτιμητής
της παραμετρικής συνλσης θ^{n+1} .

Αντίστοιχα, δεδομένου ότι η παραμ. συνλση $\frac{\theta}{1-\theta}$ δεν μπορεί να
χραφεί σε πολυωνυμική μορφή ως $a_0 + a_1 \theta + \dots + a_n \theta^n$
, ούτε για αυτή μπορεί να οριστεί αμερόληπτος εκτιμητής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Έστω X μια παρατήρηση από την κατανομή Poisson με παράμετρο θ , δηλ. $X \sim P(\theta)$ με $f(x, \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}$ $x=0, 1, \dots$
 Νόο υπάρχει μοναδικός αμερόληπτος εκτιμητής της θ .

ΛΥΣΗ

$$X \sim P(\theta) \Rightarrow E(X) = \theta$$

Επομένως X αμερόληπτος εκτιμητής της θ .

Έστω $T(x)$ μια στατιστική συνάρτηση του X τω $E(T(x)) = \theta \quad \forall \theta \Rightarrow$

$$\sum_{x=0}^{\infty} t(x) \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} = \theta \Rightarrow$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} t(x) \frac{\theta^x}{x!} = \theta e^{\theta} \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} t(x) \frac{\theta^x}{x!} = \theta \left(\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\theta^x}{x!} \right) \Rightarrow$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{t(x) \theta^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\theta^{x+1}}{x!} \quad \text{Θέω } x+1=y$$

αρα για $x=0 \Rightarrow y=1$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \frac{t(x) \theta^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\theta y}{(y-1)!} \quad \eta \quad \sum_{x=0}^{\infty} \frac{t(x) \theta^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1 \cdot \theta^x}{(x-1)!}$$

Από την τελευταία σχέση (ως ισότητα πολυνομίων)

Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές και θα έχουμε

$$t(0) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{t(x)}{x!} = \frac{1}{(x-1)!} \Rightarrow t(x) = \frac{x!}{(x-1)!} = x \quad \text{για } x=1, 2, \dots$$

Επομένως $t(x) = x$ είναι ο μοναδικός αμερόληπτος εκτιμητής του θ .

ΥΠΕΝΟΧΜΙΣΗ $R(\theta, d) = E(L(\theta, d))$

και για $L(\theta, d) = T \Sigma = (d - \theta)^2$ είναι $R(\theta, d) = E(d - \theta)^2 = \text{Var}(d) + (E(d) - \theta)^2$

Ορισμός 1 Μια απόφαση d_1 θα καλείται ισοδύναμη με μια απόφαση d_2 αν $R(\theta, d_1) = R(\theta, d_2) \quad \forall \theta \in \Theta$

Ορισμός 2 Μια απόφαση d_1 θα καλείται καλύτερη από μια απόφαση d_2 αν $R(\theta, d_1) \leq R(\theta, d_2) \quad \forall \theta \in \Theta$
 και επιπλέον $R(\theta, d_1) < R(\theta, d_2)$ για κάποιο θ .

Ορισμός 3 Ένας ευτιμητής θα καλείται παραδευτός αν ΔΕΝ υπάρχει καλύτερος του

Πρόταση Με βάση το ΜΤΣ ΔΕΝ υπάρχει βέλτιστος ευτιμητής της μη σταθερής παραμετρικής συνλούς $g(\theta)$, όπου ως βέλτιστος ευτιμητής θεωρείται αυτός που ελαχιστοποιεί την $R(\theta, d) \forall \theta \in \Theta$ δηλ d^* βέλτιστος: $R(\theta, d^*) \leq R(\theta, d) \forall \theta \in \Theta$

Απόδ

Έστω ότι υπάρχει βέλτιστος ευτιμητής της σταθερής συνλούς $g(\theta)$ και είναι ο T^* .

Αφού $g(\theta)$ = μη σταθερή $\Rightarrow \exists \theta_1 \neq \theta_2$ τ.ω $g(\theta_1) \neq g(\theta_2)$

Όμως ο T^* είναι βέλτιστος με το ΜΤΣ, που σημαίνει ότι

$$\textcircled{1} \quad E(T^* - g(\theta))^2 \leq E(T - g(\theta))^2 \quad \forall \theta \in \Theta \quad \text{και για οποιοδήποτε ευτιμητή } T.$$

$$\begin{aligned} \text{i) Έστω } T = g(\theta_1) \text{ τότε } \textcircled{1} \Rightarrow E(T^* - g(\theta))^2 &= E(g(\theta_1) - g(\theta))^2 \quad \forall \theta \in \Theta \\ \text{άρα και για } \theta = \theta_1 \text{ θα είναι } E(T^* - g(\theta_1))^2 &\leq E(g(\theta_1) - g(\theta_1))^2 \\ &\Rightarrow E(T^* - g(\theta_1))^2 \leq 0 \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

ii) Έστω $T = g(\theta_2)$ τότε

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \Rightarrow E(T^* - g(\theta))^2 &= E(g(\theta_2) - g(\theta))^2 \quad \forall \theta \in \Theta \\ \text{άρα και για } \theta = \theta_2 \text{ θα είναι } E(T^* - g(\theta_2))^2 &\leq 0 \quad \textcircled{3} \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $E(Y) = 0$ για τμ Y τότε $P(Y=0) = 1$

Επομένως από τις $\textcircled{2}$ κ $\textcircled{3}$ θα έχουμε

$$\left. \begin{aligned} E(T^* - g(\theta_1))^2 = 0 &\Rightarrow P(T^* = g(\theta_1)) = 1 \\ E(T^* - g(\theta_2))^2 = 0 &\Rightarrow P(T^* = g(\theta_2)) = 1 \end{aligned} \right\} g(\theta_1) = g(\theta_2) \text{ 'Απονο}$$

Συνεπώς δεν μπορούμε να βρούμε βέλτιστο ευτιμητή με το ΜΤΣ.

Σημείωση: Για να ισχύει κάτι τέτοιο ($\exists$ βέλτιστος ευτιμητής) θα πρέπει να περιορίσουμε την ανάλυση σε ένα υποσύνολο, όπου οι ευτιμητές πληρούν μια επιπλέον

Ιδιότητα όπως στο Επόμενο παραδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ΤΩ $X_1, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 - άγνωστη παράμετρος
Να βρεθεί ο βέλτιστος εκτιμητής του σ^2 στην οικογένεια
των εκτιμητών της μορφής $d(\underline{X}) = bS^2$, $b > 0$ όταν:

i) Η συνολική απώλεια είναι το Τ.Σ.

ii) η συνολική απώλεια είναι η συνολική Stein $(L(\theta, d) = \frac{d}{\theta} - 1 - \log(\frac{d}{\theta}))^2$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i) } R(\theta, d) &= R(\theta, bS^2) = E(bS^2 - \theta)^2 = \text{Var}(bS^2) + (E(bS^2) - \theta)^2 \\ &\stackrel{b>0}{=} b^2 \text{Var}(S^2) + (bE(S^2) - \theta)^2 \end{aligned}$$

όπως $X_1, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$

$Y \sim G(\alpha, \beta)$ τότε $E(Y) = \alpha\beta$
 $\text{Var}(Y) = \alpha\beta^2$

Επομένως $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \equiv G\left(\frac{n-1}{2}, 2\right)$ οπότε θα είναι

$$E\left(\frac{n-1}{\sigma^2} S^2\right) = \frac{n-1}{2} \cdot 2 = n-1 \Rightarrow \frac{n-1}{\sigma^2} E(S^2) = n-1 \Rightarrow \boxed{E(S^2) = \sigma^2}$$

$$\text{Var}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = \frac{n-1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} \text{Var}(S^2) = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}}$$

Επομένως θα είναι $R(\theta, d) = b^2 \frac{2\sigma^4}{n-1} + (b\sigma^2 - \theta)^2 \stackrel{\theta=\sigma^2}{=} b^2 \frac{2\theta^2}{n-1} + (b\theta - \theta)^2$

$$b^2 \frac{2\theta^2}{n-1} + (b\theta - \theta)^2 = \theta^2 \left[\frac{2b^2}{n-1} + (b-1)^2 \right] = R(\theta, d)$$

Θέλουμε ελαχιστοποίηση της $f(b)$ ως προς b $f(b)$ θα είναι

$$f'(b) = \frac{4}{n-1} b + 2(b-1) = \frac{4b + 2(b-1)(n-1)}{n-1} = \frac{2(n+1)b - (n-1)}{n-1} = 0 \Rightarrow$$

$$(n+1)b - (n-1) = 0 \Rightarrow \boxed{b^* = \frac{n-1}{n+1}}$$

Επίσης $f''(b) = \frac{4}{n-1} + 2 > 0$

άρα για b^* ελαχιστοποίηση

Οπότε ο βέλτιστος ευκλήστως θα είναι ο $d^* = b^* S^2 = \frac{n-1}{n+1} S^2 = \frac{1}{n+1} \sum (x_i - \bar{x})^2$

ii)